De l´individuel au collectif. Revue de quelques théorèmes d´existence en mathématiques.

Dominique Hoareau, domeh@wanadoo.fr

Un lemme de Schur affirme que tout endomorphisme d´un espace vectoriel E, qui stabilise chaque droite de E, est une homothétie. À l´instar de ce premier résultat, on envisage les conclusions du type : il existe un objet y tel que, quel que soit l´objet x, x et y sont reliés par une propriété $P(x, y)$. On désigne par la majuscule (P) un tel énoncé et par la minuscule idoine (p) la proposition écrite en intervertissant dans (P) les quantificateurs $\exists$ et $\forall$. Dans (p), à x fixé, l´objet y créé est le bien ou la propriété de x. On cherche, dans la suite du texte, à exhiber des notions "socialisantes" qui permettent de remonter de (p) à (P). Cette procédure, de l´individuel au collectif, sera notée $I \uparrow C$. Le lecteur se convaincra que la linéarité (déjà catalyseur dans le lemme de Schur) abonde dans ce sens :

Propriété 1

Soit E, F et G des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

1. *Deux formes linéaires φ et ψ non nulles sur E ont même noyau si, et seulement si, elles sont proportionnelles.*
2. *(Théorème de factorisation)*
   (a) *Pour f dans $\mathcal{L}(E, F)$ et g dans $\mathcal{L}(F, G)$, $\exists h \in \mathcal{L}(F, G), \quad h \circ f = g \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \subset \ker g$.*
   (b) *Pour u dans $\mathcal{L}(E, G)$ et v dans $\mathcal{L}(F, G)$, $\exists w \in \mathcal{L}(E, F), \quad v \circ w = u \Leftrightarrow \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} v$.*
3. *Si E et F sont munis de normes et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est une application linéaire de E dans F, on a les équivalences :*
   (a) *f est continue sur E.*
   (b) *f est continue en 0.*
   (c) *f est bornée sur la boule unité fermée.*
   (d) *f est lipschitzienne.*
   (e) *f est uniformément continue.*

1 Le quarté dans l´ordre

On rappelle la propriété du bon <u>ordre</u> sur $\mathbb{N}$, à la base du puissant outil de raisonnement qui est le théorème de récurrence : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément (pour l´ordre usuel) et toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément. Une application (fondamentale dans la théorie des anneaux) est la caractérisation des idéaux d´un anneau euclidien.

Propriété 2

Si A désigne l´anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs ou l´anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif $\mathbb{K}$, et si $\mathcal{I}$ est l´ensemble des idéaux de A, alors

$$(P) \quad \forall I \in \mathcal{I}, \quad \exists b \in I, \quad \forall a \in I, \quad \exists q \in A, \quad a = bq.$$

On retrouve le fait que $\mathbb{N}$ est bien ordonné, et le raisonnement par récurrence dans le théorème de Hilbert, qui affirme que tout idéal I de $\mathbb{K}[X_1, \cdots, X_n]$ est de type fini :

$$\exists f_1, \cdots, f_s \in I, \quad \forall f \in I, \quad \exists Q_1, \cdots, Q_s \in \mathbb{K}[X_1, \cdots, X_n], \quad f = Q_1 f_1 + \cdots + Q_s f_s.$$

Le corps $\mathbb{R}$ est lui-même "bien ordonné" dans le sens où il est sans lacune ou complet : toute partie non vide et majoré de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure[1]. En voici une application qui illustre $I \uparrow C$.

Propriété 3

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et si

$$(p) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \ \exists \gamma \in]0;1[, \ f((1-\gamma)x + \gamma y) \leqslant (1-\gamma) f(x) + \gamma f(y),$$

alors f est convexe. En particulier,

$$(P) \quad \exists \gamma \in]0;1[, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \ f((1-\gamma)x + \gamma y) \leqslant (1-\gamma) f(x) + \gamma f(y).$$

Par l´absurde, f est non convexe sur I. On choisit $a < b$ dans I et ν dans $]0,1[$ tels que :

$$f(\nu a + (1-\nu) b) > \nu f(a) + (1-\nu) f(b).$$

On pose : $c = \nu a + (1-\nu)b$. Soit g l´application affine définie par $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$, et $\varphi = f - g$. L´application φ vérifie $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ et $\varphi(c) > 0$. On envisage les parties de $\mathbb{R}$, $Z_- = \{u \in [a,c] \, ; \, \varphi(u) = 0\}$ (non vide et majorée) et $Z^+ = \{v \in [c,b] \, ; \, \varphi(v) = 0\}$ (non vide et minorée), fermées par continuité de φ. On pose alors à bon droit : $r = \max Z_-$ et $s = \min Z^+$ et on a : $r < c < s$. Puisque φ vérifie (comme f) la propriété (p), il existe $\gamma \in]0;1[$ tel que

$$\varphi\left((1-\gamma)r + \gamma s\right) \leqslant (1-\gamma)\varphi(r) + \gamma \varphi(s) = 0.$$

Par valeurs intermédiaires, il existe ω entre c et $t = (1-\gamma)r + \gamma s$ tel que $\varphi(\omega) = 0$. Or : $r < \omega < c$ ou $c < \omega < s$, d´où une contradiction avec le statut de r ou s.

Si les individus x qui vérifient (p) sont en nombre fini, il est en général aisé de choisir y, uniforme en x, qui valide $P(x, y)$. Dans le cas contraire, on met tout en oeuvre pour se ramener à un nombre fini de x. Aussi, de l´individuel au collectif, ou de l´infini au fini, c´est souvent le même combat.Par exemple,

[1]Le lecteur peut s´attendre, dans la suite du texte, à une place de choix pour la complétude (au sens de Cauchy), notion équivalente à la complétude pour l´ordre dans $\mathbb{R}$.

Propriété 4

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ qu´on suppose convexe.

1. *Si $\alpha < \beta$ dans I, alors f est bornée (et atteint ses bornes) sur le segment $[\alpha;\beta]$.*
2. *Si $a < b$ dans $\overset{\circ}{I}$, alors la fonction convexe f est lipschitzienne sur $[a;b]$.*
3. *Soit (f_n) une suite de fonctions convexes de I dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement sur I vers une fonction f (nécessairement convexe). Alors (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment $[a;b]$ contenu dans I°.*

Pour 1 : Sans perte de généralité, on peut supposer $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. Pour $x \in [0;1]$,

$$f(x) = f\left(x.1 + (1-x).0\right) \leqslant xf(1) + (1-x)f(0)$$

donc $f(x) \leqslant M$ où $M = \max(f(0), f(1))$. Par ailleurs, pour $\mid t \mid \leqslant \frac{1}{2}$, on a :

$$f(\frac{1}{2}) \leqslant \frac{1}{2}[f(\frac{1}{2}+t) + f(\frac{1}{2}-t)]$$

donc $f(\frac{1}{2}+t) \geqslant 2f(\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2}-t) \geqslant m$ où $m = 2f(\frac{1}{2}) - M$.

Pour 2 : Si $0 < a < b < 1$, on choisit $h > 0$ tel que $[a-h, b+h] \subset [0,1]$. Selon ce qui précède, sans changer les notations, on choisit des réels m, M tels que $f\left([a-h, b+h]\right) \subset [m, M]$. Pour x, y dans $[a,b]$, on considère le réel de $[a-h, b+h]$:

$$z = y + h\,\frac{y-x}{\mid y-x \mid}.$$

On écrit alors : $y = \lambda z + (1-\lambda)x$ où $\lambda = \frac{|y-x|}{h+|y-x|} \in [0,1]$. De là : $f(y) \leqslant \lambda f(z) + (1-\lambda)f(x)$ ou $f(y) - f(x) \leqslant \lambda\left(f(z) - f(x)\right)$. Il vient $f(y) - f(x) \leqslant \lambda(M-m) \leqslant \frac{M-m}{h} \mid y - x \mid$. Par symétrie des rôles de x et y, on conclut que f est $\frac{M-m}{h}$-lipschitzienne sur $[a,b]$.

Pour 3 : Soit $a < b$ dans $\overset{\circ}{I}$. On pose $S = [a;b]$. On choisit $h > 0$ tel que $S_1 = [a-h; b+h] \subset \overset{\circ}{I}$. Chaque f_n est $\frac{M_n - m_n}{h}$-lipschitzienne où $M_n = \max\{f_n(a-h); f_n(a+h)\}$ et $m_n = 2f_n(\frac{a+b}{2}) - M_n$. Puisque les suites numériques $(f_n(a-h))$, $(f_n(a+h))$, $(f_n(\frac{a+b}{2}))$ convergent, les suites (M_n), (m_n) et donc $(\frac{M_n - m_n}{h})$ sont bornées par un certain λ. Chaque f_n est λ-lipschitzienne sur S donc, par convergence simple, f l´est aussi.

Soit $\varepsilon > O$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ (à fixer judicieusement par la suite), on envisage la subdivision

$$x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$$

de S où, pour $0 \leqslant k \leqslant N$, $x_k = a + k\frac{b-a}{N}$. Si $x \in S$, soit k dans $\{0; ...; N-1\}$ tel que $x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}$. On a

$$\mid f_n(x) - f(x) \mid \leqslant \mid f_n(x) - f_n(x_k) \mid + \mid f_n(x_k) - f(x_k) \mid + \mid f(x_k) - f(x) \mid$$

et en posant $\mu_n = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant N} \mid f(x_k) - f_n(x_k) \mid$,

$$\mid f_n(x) - f(x) \mid \leqslant 2\lambda(x - x_k) + \mu_n.$$

On choisit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda \frac{b-a}{N} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Puisque la suite (μ_n) tend vers 0, on choisit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_0 \Rightarrow 0 \leqslant \mu_n \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Pour $n \geqslant N_0$, pour tout $x \in S$, $\mid f_n(x) - f(x) \mid \leqslant \varepsilon$.

Pour passer de l´infini au fini (et de l´individuel au collectif), les objets algébriques efficaces ont le label *de type fini*. D´ailleurs, organisés de façon commune autour de générateurs en nombre fini, ne constituent-ils pas par définition une collectivité ?

Dans un décor topologique, c´est la *compacité* qui ouvre grande ouverte une Amérique de richesses illustrant $I \uparrow C$. On peut s´en convaincre dès les premiers pas dans l´étude de la compacité :

1. Si X est un espace topologique compact et si (F_n) est une suite décroissante de fermés non vides, alors l´intersection des F_n est non vide (Propriété d´intersection finie). On passe

$$\text{de} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists y \in X, \quad y \in F_n \quad \text{à} \quad \exists y \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad y \in F_n.$$

2. Si (X, d) est un espace métrique compact non vide et si x_0 est un point de X, on peut extraire de $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B(x_0, n)$ un sous-recouvrement fini, ce qui prouve

$$(P) \quad \exists M > 0, \quad \forall x \in X, \quad d(x, x_0) \leqslant M \quad \text{tandis que } (p) \text{ est une évidence.}$$

On peut aussi relever un énoncé de l´état vrai ponctuellement à l´état vrai collectivement, via un vrai localement. La notion à l´honneur s´appelle *complétude*, vue dans le cadre vectoriel (respectivement métrique) comme un affaiblissement de la dimension finie (respectivement de la compacité). On note au passage la propriété d´intersection finie relative aux complets :

Exercice 1 *Soit (X, d) un espace métrique complet et (F_n) une suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0. Alors l´intersection des F_n est non vide.*

2 Nullstellensatz

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Un polynôme P non constant de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ a au moins un zéro dans $\mathbb{C}^n$: non nul, il a un degré en X_n (par exemple) supérieur à 1 et donc un coefficient dominant α non nul dans l´anneau infini $\mathbb{C}[X_1, ..., X_{n-1}]$. On gèle les $n-1$ première indéterminées en $(a_1, ..., a_n)$ de sorte que $\alpha(a_1, ..., a_n) \neq 0$. Le polynôme $P(a_1, ..., a_{n-1}, X_n)$ à une indéterminée est non constant donc a une racine a_n dans $\mathbb{C}$ d´après le théorème fondamental de l´algèbre, ce qui prouve que $P(a_1, ..., a_n) = 0$.

Propriété 5 *(Nullstellensatz)*

Soit I un idéal de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ qu´on peut supposer maximal d´après le théorème de Krull.

$$\forall P \in I, \quad \exists (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n, \quad P(a_1, ..., a_n) = 0.$$

Le théorème des zéros de Hilbert (ou Nullstellensatz) affirme :

$$\exists (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \forall P \in I, \quad P(a_1, ..., a_n) = 0.$$

On veut un zéro commun à tous les polynômes de I. La première idée naturelle est de réduire intelligemment I puis de chercher (à priori c´est plus facile) un zéro commun aux polynômes de la partie réduite. Dans $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$, il y a $\mathbb{C}$, X_1, ..., X_n (sans perte d´information car suffisants pour reconstruire $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$) et il est naturel de chercher des briques élémentaires de I sur chacune de ces "directions". Puisque I est propre, le seul élément de $\mathbb{C}$ présent dans I est 0. On envisage maintenant le morphisme d´anneaux :

$$\varphi_1 : P \in \mathbb{C}[X_1] \hookrightarrow P \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n] \mapsto \bar{P} \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/I.$$

Le polynôme constant 1 de $\mathbb{C}[X_1]$ n´appartient pas à $\mathrm{Ker}\,\varphi_1$ sous peine d´appartenir à l´idéal propre $I \neq < 1 >$, donc l´idéal $\mathrm{Ker}\,\varphi_1$ de l´anneau principal $\mathbb{C}[X_1]$ est engendré par un polynôme P de degré supérieur à 1. Or le corps $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos, il existe $a_1 \in \mathbb{C}$ tel que $P = (X_1 - a_1)Q$ avec $d^\circ Q < d^\circ P$, et alors $\varphi_1(P) = \varphi_1(X_1 - a_1)\varphi_1(Q) = 0$. Comme I est maximal, l´anneau quotient $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/I$ est un corps, donc intègre et $\varphi_1(X_1 - a_1) = 0$ ou $\varphi_1(Q) = 0$. Si $\varphi_1(X_1 - a_1) = 0$, $X_1 - a_1 \in \mathrm{Ker}\,\varphi_1$. Sinon, $\varphi_1(Q) = 0$ avec $1 \leqslant d^\circ Q < d^\circ P$. On recommence la manipulation avec Q et, par abaissement du degré, on finit par avoir un $X_1 - a_1$ dans $\mathrm{Ker}\,\varphi_1$. Le même argument appliqué à l´indéterminée X_2 puis X_3 jusqu´à X_n montre que $X_1 - a_1$, ..., $X_n - a_n$ sont dans I, donc l´idéal I contient l´idéal $< X_1 - a_1, ..., X_n - a_n >$. Réciproquement, si $P \in I$, on épuise les $X_i - a_i$ par divisions euclidiennes successives jusqu´à :

$$P = (X_1 - a_1)Q_1 + ... + (X_n - a_n)Q_n + R \quad \text{avec } R \in \mathbb{C}.$$

Le reste $R = P(a_1, ..., a_n)$ est nécessairement nul, sinon R serait une unité dans l´idéal propre I. Le tour de force est là : on remplace l´objet I par une partie à n éléments qui permet, par assemblage, de couvrir tout l´idéal I : on a $I =< X_1 - a_1, ..., X_n - a_n >$ et $(a_1, ..., a_n)$ est un zéro commun à tous les polynômes de I.

3 Compacité

Dans le Nullstellensatz, s´expriment en filigrane des objets et sous-objets algébriques, dits de type fini, couverts ou compris à l´aide d´un nombre fini de générateurs. Pour un espace topologique X, les éléments manipulés sont essentiellement ses ouverts, la bonne stabilité est la réunion ensembliste et l´étiquette de type fini va aux espaces compacts. La propriété de Borel-Lebesgue par recouvrement agit en ramenant au fini des questions de nature infinie et illustre avec force la procédure I↑ C.

Propriété 6 *(Un point fixe collectif)*

Soit E un espace vectoriel normé, K un convexe compact non vide de E.

1. *Si f est un endomorphisme continu de E tel que $f(K) \subset K$, alors f a un point fixe dans K.*
2. *On suppose que E est euclidien. Si $\mathcal{F}$ est une partie du groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$ et si K est stabilisé par toutes les isométries de $\mathcal{F}$, alors il existe un vecteur de $\mathcal{K}$ fixé par tout élément de $\mathcal{F}$.*

Soit a dans K, (x_n) la suite définie par $x_0 = a$ et la récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n}(x_0 + \cdots + x_{n-1}).$$

On a $x_n \in K$ et, par convexité, $u_n \in K$. Par compacité, on extrait de (u_n) une sous-suite convergente (qu´on continue à noter (u_n)), de limite l dans K. Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(u_n) = u_n + \frac{x_n - x_0}{n}$, donc, comme (x_n) est bornée et f est continue, $f(l) = l$.

On suppose que $\forall x \in K, \quad \exists f \in \mathcal{F}, \quad f(x) \neq x$. Pour $f \in \mathcal{F}$, la partie $\Omega_f = \{x \in K, \ f(x) \neq x\}$ est un ouvert de K et les Ω_f recouvrent K lorsque f parcourt $\mathcal{F}$. Par compacité de K, il existe $f_1, \ldots, f_s$ dans $\mathcal{F}$ tels que $K \subset \bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} \Omega_{f_i}$. On envisage alors l´endomorphisme continu (cf infra) $\varphi : x \mapsto \frac{1}{s}(f_1(x) + \cdots + f_s(x))$ qui stabilise K et qui a donc un point fixe a dans K. Puisque les f_i conservent la norme, il y a égalité dans l´inégalité triangulaire

$$s \parallel a \parallel = \parallel f_1(a) + \cdots + f_s(a) \parallel \leqslant \parallel f_1(a) \parallel + \cdots + \parallel f_s(a) \parallel = s \parallel a \parallel .$$

Les vecteurs $f_i(a)$ sont donc positivement colinéaires et même égaux puisque $\forall i, \ \parallel f_i(a) \parallel = \parallel a \parallel$, ce qui donne en définitive : $f_i(a) = a, \ \forall i$ et $a \notin \bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} \Omega_{f_i}$. Contradiction !

Propriété 7 *(Autour de Heine)*

1. *Si f est continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, alors*

$$\exists M, m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [0;1], \quad m \leqslant f(x) \leqslant M, \text{ et } f \text{ bornée sur } [0;1] \text{ atteint ses bornes.}$$

2. *Si f est continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, alors f est uniformément continue.*

Exercice 2 *Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors, pour tout ε strictement positif, il existe deux fonctions en escalier Φ et Ψ telles que :*

$$\forall x \in [0;1], \quad \Phi(x) \leqslant f(x) \leqslant \Psi(x) \text{ et } \Psi - \Phi \leqslant \varepsilon.$$

Propriété 8 *(Vers le spectre de $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$, Nullstellensatz topologique)*

Soit I un idéal strict de $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$.
Alors :

$$\forall f \in I, \quad \exists x \in [0;1], \quad f(x) = 0.$$

puis :

$$\exists x \in [0;1], \quad \forall f \in I, \quad f(x) = 0.$$

Soit I un idéal strict de $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$. Si f est dans I, f s´annule sur $[0;1]$ sous peine de voir $\frac{1}{f}$ dans $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ puis $f \times \frac{1}{f} = 1$ dans l´idéal strict I. Pourquoi existe-t-il un réel a de $[0;1]$ zéro commun à tout f de I ? On note $Z(f)$ l´ensemble (fermé dans $[0;1]$) des zéros de f. Si $\bigcap\limits_{f \in I} Z(f)$ est vide, par compacité de la source $[0;1]$, il existe f_1, ..., f_s dans I ne possédant aucun zéro commun, de sorte que $g = f_1^2 + ... + f_s^2$ à but réel, clairement dans l´idéal I, ne s´annule pas sur $[0;1]$. Impossible d´après ce qui précède.

Propriété **9** *(de Dini)*

On note S le segment $[0;1]$.

1. *Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes de S dans $\mathbb{R}$, qui converge simplement sur S vers une fonction continue f. Alors (f_n) converge uniformément sur S vers f.*
2. *Soit (f_n) une suite croissante de fonctions de S dans $\mathbb{R}$, qui converge simplement sur S vers une fonction continue f. Alors (f_n) converge uniformément sur S vers f.*

Pour 1 : On découpe S par la subdivision (d´abord arbitraire) $0 < \frac{1}{N} < \frac{2}{N} < ... < 1$ où $N \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in S$, on choisit k dans $\{0; ...; N-1\}$ tel que $\frac{k}{N} \leqslant x \leqslant \frac{k+1}{N}$, et pour $n \in \mathbb{N}$, on écrit

$$| f_n(x) - f(x) | \leqslant | f_n(x) - f_n(\frac{k}{N}) | + | f_n(\frac{k}{N}) - f(\frac{k}{N}) | + | f(\frac{k}{N}) - f(x) | .$$

Par convergence simple, f est croissante comme chaque f_n et

$$| f_n(x) - f(x) | \leqslant f_n(\frac{k+1}{N}) - f_n(\frac{k}{N}) \ + \left[f(x) - f(\frac{k}{N}) \right] \ + \ \mu_n \quad \text{où } \mu_n = \max_{0 \leqslant k \leqslant N} | f_n(\frac{k}{N}) - f(\frac{k}{N}) |.$$

Par une découpe en trois de la différence $f_n(\frac{k+1}{N}) - f_n(\frac{k}{N})$,

$$| f_n(x) - f(x) | \leqslant \left[f_n(\frac{k+1}{N}) - f(\frac{k+1}{N}) \right] + \left[f(\frac{k+1}{N}) - f(\frac{k}{N}) \right] + \left[f(\frac{k}{N}) - f_n(\frac{k}{N}) \right] + \left[f(x) - f(\frac{k}{N}) \right] + \mu_n$$

donc

$$| f_n(x) - f(x) | \leqslant 3\mu_n \ + \ \left[f(\frac{k+1}{N}) - f(\frac{k}{N}) \right] \ + \ \left[f(x) - f(\frac{k}{N}) \right].$$

Puisque f continue sur S est uniformément continue, on choisit N dans $\mathbb{N}^*$ de sorte que $| f(v) - f(u) | \leqslant \frac{\varepsilon}{5}$ dès que $| v - u | \frac{1}{N}$. Maintenant que N est fixé, on choisit $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant N_0 \Rightarrow 0 \leqslant \mu_n \leqslant \frac{\varepsilon}{5}$. Dans les circonstances dites, $| f_n(x) - f(x) \leqslant \varepsilon$.

Pour 2 :

4 Dimension finie

4.1 Avec le rang

Si E est un espace sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n et si f est un endomorphisme de E injectif, le résultat immédiat

$$\forall x \in E, \quad \exists g \in \mathcal{L}(E) \ , \quad g \circ f(x) = x$$

laisse place à l´existence d´un inverse à gauche par le théorème de factorisation, puis, via le théorème du rang, à la bijectivité de f :

$$\exists g \in \mathcal{L}(E) \ , \quad \forall x \in E, \quad g \circ f(x) = f \circ g(x) = x.$$

Propriété 10 *(Interpolation de Lagrange)*

Si $a_0, \ldots, a_n$ sont $n+1$ réels distincts et $b_0, \ldots, b_n$ $n+1$ réels quelconques, alors il existe (un unique) polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$.

On peut même trouver un polynôme P de degré inférieur à $2n$ valant b_i en a_i et tel que P' prend en chaque a_i une valeur donnée.

Exercice 3 *(Vers le théorème de Cauchy-Lipschitz obtenu à partir de la propriété 20 (page 15))*
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $(t_0, x_0) \in U$ et $f : (t,x) \mapsto f(t,x)$ une application C^1 de U dans $\mathbb{R}$. Alors (p) : il existe un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant t_0 dans son intérieur tel que, pour tout $s \in I$, il existe une fonction x definie et dérivable sur I vérifiant :

$$\forall t \in I, \quad (t, x(t)) \in U \text{ et } \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(s) = f(s, x(s)) \end{cases} .$$

On sait qu´on a mieux, à savoir l´existence locale d´une solution au problème de Cauchy ((P)) : l´équation différentielle $x' = f(t,x)$ admet une solution (x, I)

- *dont l´intervalle-source I a t_0 pour point intérieur*
- *qui passe par (t_0, x_0) i.e $x(t_0) = x_0$.*

On peut aussi citer

Propriété 11 *(Dual d´un espace euclidien)*

Si E est de dimension finie et muni d´un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$, pour toute forme linéaire ϕ sur E, il existe (un unique) $a \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \phi(x) = \langle a, x \rangle .$$

Qu´en est-il en dimension quelconque ?

4.2 Équivalence des normes en dimension finie

Pour voyager avec un espace vectoriel dans son petit bagage à main, on a le choix entre

1. faire un tri en n´emmenant que les vecteurs d´une base de E, puis reconstruire E à l´arrivée par combinaisons linéaires.
2. munir E d´une norme et le comprimer en ne retenant que sa boule $B_f(0,1)$ unité fermée (ou sa sphère unité), puis reconstituer E par homothéties.

Cette tâche est facilitée si E est de dimension finie (nombre fini de vecteurs à embarquer) ou si $B_f(0,1)$ est compacte. Ces deux étiquettes de type finie sont équivalentes.

Propriété 12 *(Caractérisations de la dimension finie)*

1. *Sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Autrement dit, si N_1 et N_2 sont deux normes sur E, la dimension finie permet de passer de l´affirmation évidente :*
$$\forall x \in E, \quad \exists \alpha, \beta \geqslant 0, \quad \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$$
à l´assertion non triviale :
$$\exists \alpha, \beta \geqslant 0, \quad \forall x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x).$$
2. *Pour un espace vectoriel E, les propositions suivantes sont équivalentes :*
   (a) *E est de dimension finie.*
   (b) *la boule unité fermée de E est compacte.*
   (c) *Toute forme linéaire sur E est continue.*
   (d) *Pour tout espace normée F, une application linéaire de E sur F est continue.*
   (e) *Les normes sur E sont équivalentes.*

Si E est un espace de dimension finie et si N est une norme quelconque sur E, alors (E, N) est complet. Quels sont les espaces vectoriels complets pour toute norme ?

Exercice 4 *(Remontées de la convergence simple à la convergence uniforme)*

1. *Si une suite de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ converge simplement sur $I = [0;1]$, la convergence est uniforme sur I.*
2. *Soit E l´espace des fonctions bornées de $I = [0;1]$ dans $\mathbb{R}$ et F un sous-espace de E de dimension finie n.*
   (a) *Montrer que*
$$\forall f \in F, \quad \exists (x_1, \cdots, x_n) \in I^n, \quad f(x_i) = 0, \ \forall i \in \{1, \cdots, n\} \Rightarrow f = 0.$$
   (b) *Montrer que*
$$\exists (x_1, \cdots, x_n) \in I^n, \quad \forall f \in F, \quad f(x_i) = 0, \ \forall i \in \{1, \cdots, n\} \Rightarrow f = 0.$$
   (c) *En déduire que si (φ_p) est une suite de fonctions de F qui converge simplement vers f, alors la convergence de (φ_p) vers f est uniforme.*

En dimension finie, on peut se soustraire des contraintes d´une norme particulière et choisir la norme qui s´adapte le mieux au problème posé. En route pour une bouffée de liberté ...

Pour 1) : Choisir $n+1$ points a_0, ..., a_n distincts dans I et envisager la norme
$$N : P \mapsto \mid P(a_0) \mid + \cdots + \mid P(a_n) \mid \quad \text{équivalente à la norme uniforme sur } \mathbb{R}_n[X].$$

Pour 2)a) : Soit $(f_1, \cdots, f_n)$ une famille base de F et f dans F. On peut choisir $(x_1, \cdots, x_n) \in I^n$ tels que le déterminant
$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix}$$

soit non nul. En cas contraire, pour chaque choix de $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ dans I^{n-1}, et pour tout x de I,

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \end{vmatrix} = 0.$$

On développe par rapport à la dernière ligne et on obtient une identité en x :

$$A_1 f_1(x) + \cdots + A_n f_n(x) = 0.$$

Puisque la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre, on a $A_1 = \cdots = A_n = 0$. Avec $A_n = 0$, on a

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_2) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_1(x_{n-1}) & f_2(x_{n-1}) & \cdots & f_n(x_{n-1}) \end{vmatrix} = 0, \quad \text{pour tous réels } x_1, \ldots, x_{n-1} \text{ de } I..$$

On raisonne par descente jusqu´à $f_1(x_1) = 0$, et ce pour tout x_1 de I. Ainsi, $f_1 = 0$, ce qui est exclu puisque $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre. Maintenant, pour un tel choix de $(x_1, \cdots, x_n)$ de I^n, si une fonction $f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$ de F s´annule en chaque x_i, le système

$$\begin{cases} \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f_2(x_1) + \cdots + \alpha_n f_n(x_1) = 0 \\ \alpha_1 f_1(x_2) + \alpha_2 f_2(x_2) + \cdots + \alpha_n f_n(x_2) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 f_1(x_n) + \alpha_2 f_2(x_n) + \cdots + \alpha_n f_n(x_n) = 0 \end{cases},$$

de taille n et d´inconnues $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, est un système de Cramer, donc $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, ce qui donne $f = 0$.

Pour 2)b) : On raisonne sur la dimension n de F. Si $n = 0$, F est réduit à 0 et il n´y a rien à dire. Pour $n \geqslant 1$, on choisit φ non nulle dans F et x dans I tel que $\varphi(x) \neq 0$. Puisque les fonctions de F qui s´annulent en x forment un hyperpan H de F et $\varphi \notin H$, on a $F = \mathbb{R}\varphi \bigoplus H$. L´hypothèse de récurrence donne $x_1, \ldots, x_{n-1}$ dans I^{n-1} tels que

$$\forall h \in H, \quad h(x_i) = 0,\ \forall i \in \{1, \cdots, n-1\} \Rightarrow h = 0.$$

Pour $f = \alpha\varphi + h$ dans F qui s´annule en x et en chaque x_i, on a $f(x) = \alpha\varphi(x)$ donc $\alpha = 0$ et $f = h$. Puisque $f(x_i) = 0$, $h \in H$ est telle que $h(x_i) = 0$ donc $h = 0$, et $f = 0$.

Pour 2)c) : pour f dans F, on pose $N(f) = \sum_{i=1}^{n} \mid f(x_i) \mid$. On définit ainsi une norme sur F. Pour $p \in \mathbb{N}$, $N(\varphi_p - f) = \sum_{i=1}^{n} \mid \varphi_p(x_i) - f(x_i) \mid$. Par convergence simple de (φ_p) vers f, la suite (φ_p) converge vers f au sens de N, et par équivalence des normes en dimension finie, converge aussi pour la norme uniforme.

5 Complétude

5.1 Lemme de Baire

Propriété 13

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n.

1. *$f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si, et seulement si, pour tout $x \in E$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k(x) = 0$.*
2. *L´espace vectoriel E ne peut s´écrire comme réunion finie de sous-espaces stricts F_1, ..., F_p. Autrement dit,*
$$\forall x \in E,\ \exists 1 \leqslant i \leqslant p,\ x \in F_i \Rightarrow \exists 1 \leqslant i \leqslant p,\ \forall x \in E,\ x \in F_i.$$
3. *Soit F un espace normé et soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille d´applications linéaires (continues) de E dans F. Si*
$$\forall x \in E, \quad \exists c_x > 0, \quad \forall i \in I, \quad \| T_i x \| \leqslant c_x,$$
alors
$$\exists c > 0, \quad \forall x \in E, \quad \forall i \in I, \quad \| T_i x \| \leqslant c \| x \| .$$

<u>*Pour* 1)</u> : Si $(e_1, ..., e_n)$ désigne une base de E, on choisit $k_i \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{k_i}(e_i) = 0$, puis on vérifie que l´entier $k = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} k_i$ vérifie : $\forall x \in E,\ f^k(x) = 0$.

<u>*Pour* 2)</u> : Par récurrence sur la dimension de E, si $\dim E = 1$, $\{0\}$ est le seul sous-espace strict de E et le résultat est acquis. On passe de $n-1$ à n. Si $E = F_1 \cup ... \cup F_k$ avec F_i sous-espace strict de E et si H est un hyperplan de E, alors $H = \bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i \cap H$, et par hypothèse de récurrence, H est un certain $H = F_{i_0} \cap H$. Ainsi, $H \subset F_{i_0}$ et, avec $\dim F_{i_0} \leqslant n-1$ et $\dim H = n-1$, $H = F_{i_0}$. Tout hyperplan de E est donc dans la décomposition $E = F_1 \cup ... \cup F_k$. Pour aboutir à une contradiction, reste à vérifier que E a une infinité d´hyperplans. On prend $(e_1, ..., e_n)$ une base de E et pour $j \in \mathbb{N}$, on pose $H_j = \text{Vect}\,(\epsilon_j = e_2 + ke_1, e_3, ..., e_n)$. On montre alors que la famille $(\epsilon_j = e_2 + je_1, e_3, ..., e_n)$ est libre et $H_j = H_l \Leftrightarrow \varepsilon_j \in H_l \Leftrightarrow j = l$.

L´argument de récurrence profite au mieux de la dimension finie de E. Peut-on trouver une preuve de substitution qui permettrait de passer au cas où E est de dimension quelconque ? La réponse est positive ; On raisonne par récurrence sur le nombre p de sous-espaces. Si $p = 1$, c´est évident. On suppose le résultat vrai pour $p-1$, avec $p \geq 2$. Si l´on a les hypothèses pour p, le résultat vaut lorsque $F_1 \subset F_2 \cup ... \cup F_p$, puisqu´on est ramené à $F_2 \cup ... \cup F_p = E$. On suppose que F_1 n´est pas contenu dans $F_2 \cup ... \cup F_p$ et on veut prouver que $F_1 = E$. On commence par choisir $a \in F_1$, hors de $F_2 \cup ... \cup F_p$. Soit maintenant $x \in E$, λ_1, ..., λ_{p+1} $p+1$ scalaires distincts dans $\mathbb{R}$. Les $p+1$ vecteurs $a + \lambda_i x$ sont dans les p tiroirs F_1, ..., F_p, donc deux d´entre eux, $a + \lambda_i x$ et $a + \lambda_j x$, sont dans le même F_k. Ainsi, $(\lambda_i - \lambda_j)x \in F_k$, $x \in F_k$ puisque $\lambda_i \neq \lambda_j$, $a \in F_k$, $k = 1$ et en définitive, $x \in F_1$. On remarque que le principe des tiroirs de Dirichlet est ici la passerelle entre le fini et l´infini.

<u>*Pour* 3)</u> : Pour tout x dans la boule $\overline{B(0;1)}$ unité fermée de E, on prend $c_x > 0$ tel que $\| T_i x \| < c_x$

pour tout i de I. A x fixé et c_x choisi, par continuité de chaque T_i, on envisage un $r_x^i > 0$ tel que

$$\forall y \in B(x, r_x^i), \quad \| T_i y \| \leqslant c_x,$$

donc

$$\forall i \in I, \quad \forall y \in \bigcup_{i \in I} B(x, r_x^i), \quad \| T_i y \| \leqslant c_x.$$

Puisque E est de dimension finie, du recouvrement ouvert $\overline{B(O;1)} = \bigcup_{x \in \overline{B(0;1)}} \left(\bigcup_{i \in I} B(x, r_x^i) \right)$, on extrait un sous-recouvrement fini, d´où l´existence de x_1, ..., x_k dans $\overline{B(0;1)}$ tels que

$$\overline{B(0;1)} \subset \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant k} \left(\bigcup_{i \in I} B(x_j, r_{x_j}^i) \right).$$

On pose $c = \max_{1 \leqslant j \leqslant k} c_{x_j}$. Un vecteur $x \in \overline{B(0;1)}$ se trouve dans un certain $\bigcup_{i \in I} B(x_j, r_{x_j}^i)$ donc, pour tout $i \in I$, $\| T_i x \| \leqslant c_{x_j} \leqslant c$. D´où le résultat.

Si on ne suppose plus que E est de dimension finie, l´argument de compacité de la boule unité fermée est caduque. Quelle hypothèse faire sur l´espace de travail E pour remplacer la dimension finie et maintenir une conclusion valide ?

Propriété 14 *(Lemme de Baire)*

Dans un espace métrique complet, une réunion dénombrable de fermés d´intérieur vide est encore d´intérieur vide. De façon équivalente, une intersection dénombrable d´ouverts denses est encore dense.

Exercice 5 *(Saut de dimension pour la complétude)*
Alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est toujours complet, montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ne l´est jamais.

Comme baireries classiques, on peut citer

Propriété 15

1. *Si E est un espace de Banach et si f est une application linéaire continue de E dans E, alors f est ponctuellement nilpotente si, et seulement si, f est nilpotente.*
2. *Si f est une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(x) = 0,$$

alors f est un polynôme sur $[0;1]$ ou encore

$$\exists k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(k)}(x) = 0.$$

Pour 1 : On suppose que $f \in \mathcal{L}_c(E)$ est nilpotente en tout point de E. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \operatorname{Ker} f^n$. Par continnuité de f, chaque F_n est fermé et, avec $E = \bigcup_n F_n$ complet, Baire assure qu´il

existe $N \in \mathbb{N}$ tel que le sous-espace F_N soit d´intérieur non vide (f localement nilpotente autour d´un point), donc, classiquement grâce à la structure vectorielle, $F_N = E$ et f est globalement nilpotente.

Pour 2 : On a besoin de local partout (en tout point) avant d´étendre le résultat au global. Pour $k > 0$, on désigne par A_k le fermé de $\mathbb{R}$:

$$A_k = \{x \in \mathbb{R},\ f^{(k)}(x) = 0\}.$$

Puisque les A_k recouvrent le complet $\mathbb{R}$, avec le lemme de Baire, il existe $p > 0$ tel que A_p soit d´intérieur non vide. La bonne propriété, à savoir être polynômial, est à ce stade local en un point (au moins) et ponctuelle partout. On remarque que la suite $(\overset{\circ}{A_n})_{n \geqslant p}$, comme $(A_n)_{n \geqslant p}$, est croissante de limite $\Omega = \bigcup\limits_{n \geqslant p} \overset{\circ}{A_n}$. on pose $F = \mathbb{R} \setminus \Omega$. Si le fermé F est non vide, on écrit $F = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} F \cap A_k$ et, une deuxième fois avec Baire sur la partie complète F, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $F \cap A_q$ contient un ouvert U non vide. On a alors de façon contradictoire avec la définition de F : $\forall x \in U$, $f^{(q)}(x) = 0$. Ainsi, F est vide et $\mathbb{R} = \Omega = \bigcup\limits_{n \geqslant p} \overset{\circ}{A_n}$. La bonne propriété est maintenant locale en tout point. Le segment $[0; 1]$ peut être recouvert par un nombre fini de $\overset{\circ}{A_n}$ donc, par croissance de $(\overset{\circ}{A_n})_{n \geqslant p}$, est contenu dans un certain $\overset{\circ}{A_k}$, ce qui donne le résultat souhaité.

Le lemme de Baire permet par ailleurs de justifier

Propriété 16 *(Théorème de Banach-Steinhaus)*

Soit E un espace vectoriel normé complet, F un espace normé et soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille d´applications linéaires (continues) de E dans F. Si

$$\forall x \in E, \quad \exists c_x > 0, \quad \forall i \in I, \quad \| T_i x \| \leqslant c_x,$$

alors

$$\exists c > 0, \quad \forall x \in E, \quad \forall i \in I, \quad \| T_i x \| \leqslant c \| x \| .$$

5.2 Quand complétude rime avec finitude

Sur le lemme de Baire, repose aussi le théorème d´isomorphisme de Banach qui affirme qu´une application linéaire continue bijective entre deux espaces normés complets est en fait un isomorphisme bi-continu.

Propriété 17 *(Une autre caractérisation de la dimension finie)*

Un espace vectoriel E est de dimension finie si, et seulement si, pour toute norme N sur E, (E, N) est complet.

Exercice 6 *(Espace métrique omni-complet)*
Soit X un ensemble non vide, $\mathcal{D}(X)$ l´ensemble des distances sur X et $\mathcal{D}_1(X)$ la partie de $\mathcal{D}(X)$ de celles majorées par 1.

1. *Pour d dans $\mathcal{D}(X)$, on note $d_1 = \min(1, d)$. On vérifie que d_1 est dans $\mathcal{D}_1(X)$ et*

$$(X, d) \text{ est complet si, et seulement si, } (X, d_1) \text{ est complet.}$$

2. *X est dit omni-complet lorsque (X, d) est complet pour toute distance d de $\mathcal{D}(X)$ (ou pour toute distance δ de $\mathcal{D}_1(X)$).*
3. *Si X est omni-complet, et si Y est équipotent à X, alors Y est aussi omni-complet.*
4. *Si X est réunion de deux parties non vides A et B, chaque distance δ de $\mathcal{D}_1(A)$ peut être prolongée en une distance d de $\mathcal{D}(X)$:*

$$d_{|A^2} = \delta, \quad d(a, b) = d(b, a) = 1 \text{ si } (a, b) \in A \times B$$

et

$$d(u, v) = d(v, u) = 0 \text{ si } u = v \text{ dans } B, 2 \text{ si } u \neq v \text{ dans } B.$$

Il est facile de vérifier que d est symétrique et séparante. Pour l´inégalité triangulaire, on prend α, β et γ distincts dans X et, pour montrer que $d(\alpha, \gamma) \leqslant d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma)$, on distingue le cas $d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma) \geqslant 2$ (facile), et $d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma) < 2$: l´un de α, β, γ est dans A, puis ils sont tous dans A.

5. *Si X est omni-complet, chaque partie stricte de X l´est aussi. En particulier, si on suppose X omni-complet et infini, X contient une partie strictement dénombrable, elle même omni-complète, et par équipotence, $\mathbb{Q}$ est complet pour la distance usuelle. Ce qui n´est pas. En définitive, X est omnicomplet si, et seulement si, X est fini.*

5.3 Avec un produit scalaire

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n et si F est un fermé de E, alors, par un argument classique de locale compacité, pour tout x de E, il existe $z \in F$ tel que

$$\forall y \in F, \quad \| x - z \| \leqslant \| x - y \| .$$

On suppose E de dimension quelconque, muni d´un produit scalaire. Si F est un sous-espace de E de dimension finie n, on choisit une base orthonormée $(e_1, \cdots, e_n)$ de F et le vecteur $z = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle \; e_k$ de F vérifie

$$\forall y \in F, \quad \| x - z \| \leqslant \| x - y \| .$$

On a un résultat efficace lorsqu´on remplace sous-espace de dimension finie par convexe complet non vide.

Propriété 18 *(Théorème de Riesz de la projection sur un convexe complet)*

Si C est un convexe complet non vide de l´espace préhilbertien E, pour tout $x \in E$, il existe (un unique) z dans C tel que

$$\forall y \in F, \quad \| x - z \| \leqslant \| x - y \| .$$

Le vecteur z est caractérisé par la propriété de l´angle obtu :

$$z \in C \quad \text{et} \quad \forall y \in C, \quad \langle x - y; z - y \rangle \leqslant 0.$$

Corollaire 1 *(Dual d´un Hilbert, théorème de représentation de Riesz)*
Si E est un espace de Hilbert et ϕ une forme linéaire sur E, alors il existe $a \in E$ tel que $\phi = \langle a, \bullet \rangle$.

6 Points fixes

Propriété 19 *(Théorème du point fixe d´Edelstein)*

Une contraction forte d´un espace métrique compact (E, d) dans lui-même, c-à-d une application $f : E \to E$ telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour $x \neq y$, possède un unique point fixe l dans E, obtenu par le schéma des approximations successives : si on note C la fonction constante de E dans E de valeur l et (f_n) la suite des itérées de f, (f_n) converge simplement sur E vers C. Mieux, la convergence est uniforme.

On justifie l´existence en considérant l´application continue $\varphi : x \mapsto d(f(x), x)$ du compact E dans $\mathbb{R}_+$ et son minimum m atteint en un certain $l \in E$. Si $m > 0$, $f(l) \neq l$ et $d(f \circ f(l), f(l)) < d(f(l), l)$, ce qui contredit le statut de l. L´unicité du point fixe ne pose aucun problème : si l et l' vérifient $f(l) = l$ et $f(l') = l'$, on a nécessairement $l' = l$, sinon $d(l', l) = d(f(l'), f(l)) < d(l', l)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \in E$, si $d(x, l) < \varepsilon$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d(f_n(x), l) < \varepsilon$. Soit K le complémentaire de la boule ouverte $B(l, \varepsilon)$ dans E. Fermé dans le compact E, K est lui-même compact et l´application $x \mapsto \frac{d(f(x),l)}{d(x,l)}$ correctement définie et continue de K dans $\mathbb{R}_+$ est majorée et atteint son maximum k, avec nécessairement $k < 1$. Puisque l´espace métrique E est compact, E est borné : soit $A > 0$ tel que $E \subset B(l, A)$. Pour $x \in K$, si $d(f(x), l) \geqslant \varepsilon$, alors

$$d(f_2(x), l) \leqslant k\, d(f(x), l) \leqslant k^2\, d(x, l) \leqslant k^2\, A.$$

Par récurrence, $\forall x \in E,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ d(f_n(x), l) \leqslant \min\{\varepsilon, k^n\, A\}$. On choisit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_0 \Rightarrow k^n\, A \leqslant \varepsilon$ et on a bien la convergence uniforme de (f_n) vers C sur E.

Le théorème du point fixe d´Edelstein est en quelque sorte optimal. Si on remplace contraction forte par contraction large (ou 1-lipschitzienne), la conclusion n´est plus valide. On peut considérer dans $\mathbb{R}^2$ la rotation $(x, y) \mapsto (-y, x)$ sur le cercle unité. Si on maintient la forte contractance et si on glisse de la compacité à la complétude de E, la conclusion ne subsiste plus. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x + \frac{\pi}{2} - \arctan x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est clairement sans point fixe dans $\mathbb{R}$ alors que f, dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\mid f'(x) \mid = \mid 1 - \frac{1}{1+x^2} \mid < 1$, est, via les accroissement finis, une contraction stricte. En revanche, si on accompagne cet assouplissement de structure sur l´espace ambiant par un renforcement de la condition de contraction (contraction stricte au lieu de contraction forte), on obtient le célèbre théorème du point fixe de Picard.

Propriété 20 *(Théorème du point fixe de Picard)*

Une application k-lipschitzienne $(0 \leqslant k < 1)$ d´un espace métrique complet dans lui-même admet un unique point fixe l obtenu par approximations successives : si on note C la fonction constante de E dans E de valeur l et (f_n) la suite des itérées de f, (f_n) converge simplement vers C. Mieux, la suite (f_n) converge uniformément sur tout borné de E.

La suite (f_n) converge simplement vers C, avec, classiquement, le contrôle

$$d(f_n(x), l) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(f(x), x) \text{ valable en tout } x \text{ de } E.$$

Si x appartient à une boule $\overline{B(a,r)}$, $d(f(x),x) \leqslant d(f(x), f(a)) + d(f(a), a) + d(a,x) \leqslant d(f(a),a) + 2r$, ce qui prouve que (f_n) converge uniformément sur $\overline{B(a,r)}$.